TITLE:
ストレンジアトラクターの次元について(非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告)

AUTHOR(S):
徐, 丙鉄

CITATION:
徐, 丙鉄. ストレンジアトラクターの次元について(非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告). 物性研究 1981, 35(6): F46-F49

ISSUE DATE:
1981-03-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/90196

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

われる。

ある離散的なマッピングまたは確率過程において，N回のステップの間に，ある事象Aがn回おこるとしよう。そのとき，$N \gg 1$では，

$$< (n - <n>)^2 > \sim N^{2\nu} \tag{14}$$

とおけよう。事象Aが全くランダムにおこるときには$\nu = 1/2$である。したがって，このνはプロセスを特徴づける指数である。プロセスの他の量，たとえば，Hausdorff次元とこのνの間には一定の関係があるだろうか？　カオスを示す一次元マッピングやLorenz系のFlip-Flop模型などに，このような観点を導入することは有用であると思われる。

参 考 文 献

1) H. Mori & H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1931.

2) P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1979).

3) H. Fujisaka & H. Mori, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 54.

ストレンジアトラクターの次元について

九大・理　　徐　　丙 鉄

ストレンジアトラクターの構造を表現する量として，その次元がある。次元としてはハウスドルフ次元をとる。n次元空間の集合のハウスドルフ次元とは大雑把に言えば，その集合を直径lのn次元球で覆うのに必要な最小の球の個数を$N(l)$としたとき，

$$N(l) \propto l^{-D}, \quad l \to 0$$

となるが，この指数Dのことである。

従来ストレンジアトラクターの次元をリヤプノフ数を用いて表現してきた。リヤプノフ数とは軌道の不安定性を表現する平均量である。よって，ローカルなアトラクターの構造に依存するハウスドルフ次元がリヤプノフ数のみで一般に表現できるはずがない。そこで，ハウスドルフ次元が分る単純な系について，そのハウスドルフ次元と従来のリヤプノフ数を用いての次元を比較してみた。

ここで考察する系はスメールソレノイドを少し拡張したものである。スメールソレノイドとは(1図)のようなものである。その断面が(2図)である。これを拡張したものの断面が(3図)に示されている。(このような写像を無限回くり返したときの集合が考察の対象である。)

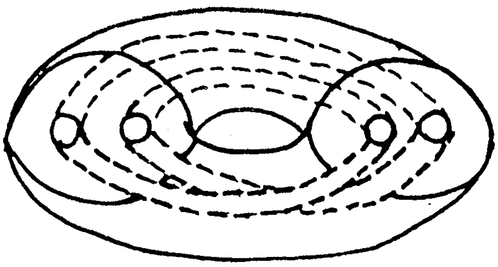


図1

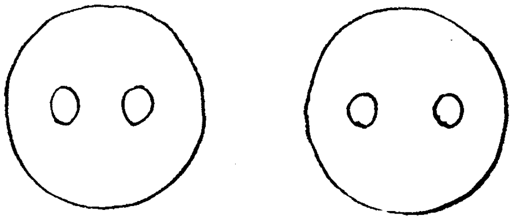


図2

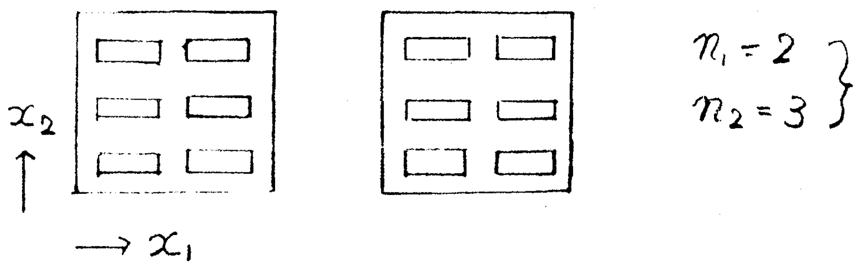


図3

今，x_i 方向の収縮率を r_i ($i = 1, 2$)，その方向の図形の個数を n_i としよう。すると断面の集合の次元は以下のようになる。

(1) ハウスドルフ次元 d

$$d = \sum_{i=1}^{2} \frac{\ln n_i}{\ln \frac{1}{r_i}}$$

(2) 収縮する方向のリヤプノフ数を算術平均して定めた次元 D (相似次元)

$$D = \frac{\ln n_1 \cdot n_2}{\frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{r_1} + \ln \frac{1}{r_2}\right)}$$

(3) 収縮する方向のリヤプノフ数を調和平均して定めた次元 D_{H}

$$D_{\mathrm{H}}=(\ln n_1 n_2)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln\frac{1}{r_1}}+\frac{1}{\ln\frac{1}{r_2}}\right)$$

(4) Kaplan, York によって提案された次元 $D_{\mathrm{K.Y}}$

$r_1 > r_2$ であるとする。

(i) $n_1\cdot n_2\cdot r_1 < 1$ のとき

$$D_{\mathrm{K.Y}}=\frac{\ln n_1\cdot n_2}{\ln\frac{1}{r_1}}$$

(ii) $n_1\cdot n_2\cdot r_1 > 1$ のとき

$$D_{\mathrm{K.Y}}=1+\frac{\ln n_1\cdot n_2\cdot r_1}{\ln\frac{1}{r_2}}$$

(2),(3),(4)が従来のリヤプノフ数を用いて定めた次元で(1)と比較して分ることは,(1)では n_1 と n_2 の値が独立に使われているが,(2)(3)(4)ではそれらの積が使われているということである。(2)(3)(4)では集合の各方向への分配の様子の情報が退化していると言える。

最後に(1)(2)(3)(4)の関係についてまとめておく。

(a) $r_1 = r_2$ のとき　　$d = D = D_{\mathrm{H}} = D_{\mathrm{K.Y}}$

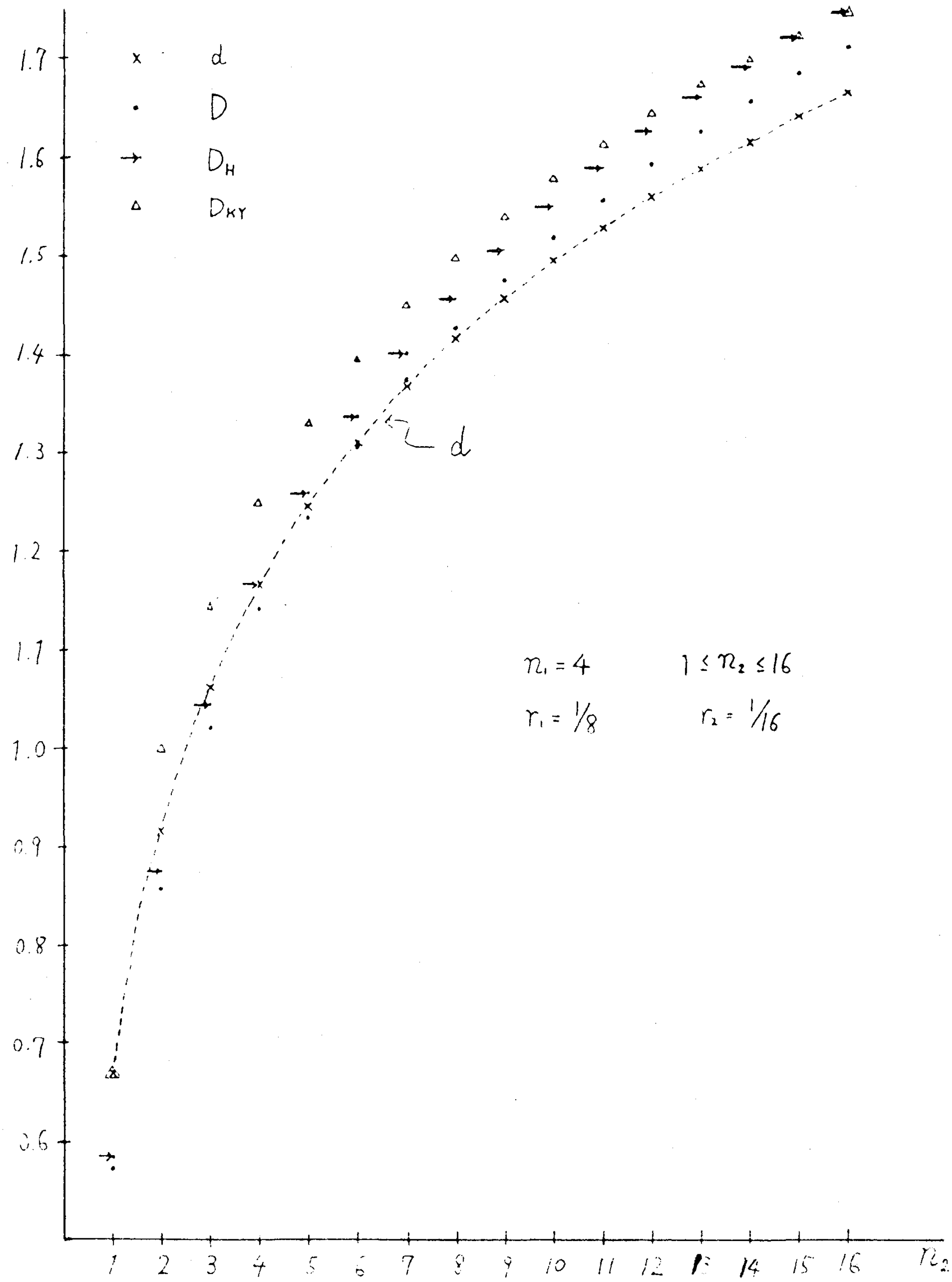
(b) $n_1 = n_2$ のとき　　$d = D_{\mathrm{H}}$

(c) $D_{\mathrm{K.Y}} > D$, $D_{\mathrm{H}} > D$

(d) $D_{\mathrm{K.Y}} > D_{\mathrm{H}} > D$ となることが推測される。

(e) $D_{\mathrm{K.Y}}$ はハウスドルフ次元の上界を与えることが推測される。

(f) $n_1 = 4$, $r_1 = 1/8$, $r_2 = 1/16$ とし,n_2 を変化させたときの d, D, D_{H}, $D_{\mathrm{K.Y}}$ の値は(4図)のようになる。



× d
• D
→ D_H
△ D_{KY}
d
$n_1 = 4$ $1 \leq n_2 \leq 16$
$r_1 = 1/8$ $r_2 = 1/16$
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
n_2

図 4